

---

# Compendio de fórmulas sobre proyecciones cartográficas

Rubén C. Rodríguez  
[rubenro@fibertel.com.ar](mailto:rubenro@fibertel.com.ar)

2012

---

## Introducción

El fascículo incluye las características y las fórmulas de cálculo sobre las proyecciones cartográficas más usuales en la Argentina: Gauss-Krüger para las cartas topográficas con sus variantes UTM y Capital Federal, Mercator para la cartografía náutica y Cónica Conforme de Lambert para la cartografía aeronáutica.

Las fórmulas se complementan con ejemplos numéricos para la conversión de coordenadas curvilíneas a planas agregando, como referencia, algunos valores intermedios tanto para solución directa como para la inversa.

Como elipsoides de referencia se emplearon el Internacional de 1924 y el WGS 84.

Las coordenadas planas X e Y están dirigidas hacia el Norte y el Este respectivamente en el caso de Gauss-Krüger sin embargo en otros casos se sigue la tendencia - como ocurre en la literatura de la materia y en los *softwares* de procesamiento - de X hacia el Este e Y hacia el Norte. A fin de evitar confusiones se agrega a continuación de la abscisa y de la ordenada hacia donde se dirige.

Adicionalmente aparecen tres apéndices:

- el primero destinado a mencionar la evolución de la elección de las proyecciones destinadas a los planisferios,
- el segundo con una aplicación práctica de la elipse indicatriz de Tissot para evaluar una proyección y los resultados de un procedimiento de calificación de proyecciones, y
- el tercero destinado a informar acerca de las proyecciones cartográficas y los marcos de referencia usados en los países limítrofes de la Argentina.

Finalmente agregamos la principal bibliografía consultada con indicación de la que se encuentra disponible en Internet.

### Nota 1

Para la proyección Mercator se presentan dos soluciones, una esférica y otra elipsoidal. ¿Cuál es el límite entre usar una u otra? Lo define la escala: las cartas con escalas superiores a 1:1000000 requieren considerar el empleo del elipsoide. El concepto es válido para cualquier proyección.

### Nota 2

Si bien no está en la bibliografía es interesante considerar, desde un punto de vista docente, la presentación de Moha Elayachi titulada *A New Didactical Mechanism to Understand Map Projections* durante la sesión TS08F de la reunión de la FIG 2011 realizada en Marruecos y que se encuentra en <http://www.fig.net/fig2011>

## Gauss Krüger

Es la proyección cartográfica imaginada por Lambert (1772) a la que Gauss (1822) le dio forma matemática y Krüger (1912) acotó sus deformaciones.

Es analítica pues el pasaje del elipsoide al plano se realiza a través de un proceso matemático y es conforme pues se conservan los ángulos (es decir las formas). En consecuencia las distancias lo

mismo que las superficies sufren deformaciones que son controlables. Tanto la conservación de los ángulos como las deformaciones, lineales y superficiales, serán demostradas durante el desarrollo de esta sección.

Su aplicación en la Argentina data de 1925 cuando fue adoptada para la cartografía oficial. Para ello se estableció un sistema de fajas meridianas de 3° de ancho cada una en las que el meridiano central es uno cuya graduación es múltiplo de tres, de acuerdo al siguiente detalle:

Faja	1	2	3	4	5	6	7
Longitud del meridiano central ( $\lambda_0$ )	-72°	-69°	-66°	-63°	-60°	-57°	-54°

Para convertir las coordenadas geodésicas (latitud y longitud) en planas es necesario calcular en primer lugar el arco de meridiano elíptico desde el Ecuador hasta la latitud del punto según la siguiente expresión:

$$AM = a (A_0 \phi - A_2 \text{sen } 2 \phi + A_4 \text{sen } 4 \phi - A_6 \text{sen } 6 \phi + \dots)$$

siendo

$\phi$ , la latitud,

a, el semieje mayor del elipsoide elegido,

$e^2$  el cuadrado de la excentricidad del mismo,  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$

$\lambda$ , la longitud y

$$l = \lambda - \lambda_0$$

$$A_0 = 1 - 1/4 e^2 - 3/64 e^4 - 5/256 e^6 - \dots$$

$$A_2 = 3/8 (e^2 + 1/4 e^4 + 15/128 e^6 + \dots)$$

$$A_4 = 15/256 (e^4 + 3/4 e^6 + \dots)$$

$$A_6 = 35/3072 e^6$$

También calculamos el arco de meridiano correspondiente al cuadrante terrestre

$$Q = a A_0 \pi/2$$

(a Q se lo conoce también como falso Norte)

Las coordenadas planas se expresan en metros.

X, tienen como origen el polo sur, y es positiva hacia el Norte.

$$X = Q + AM + (1 \cos \phi)^2 N t/2 + (1 \cos \phi)^4 N t (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4)/24 + (1 \cos \phi)^6 N t (61 - 58 t^2 + t^4)/720$$

$$y = (1 \cos \phi) N + (1 \cos \phi)^3 N (1 - t^2 + \eta^2)/6 + (1 \cos \phi)^5 N (5 - 18 t^2 + t^4)/120$$

donde  $t = \text{tg } \phi$   $\eta^2 = e^{-2} \cos^2 \phi$   $e^{-2} = e^2/(1 - e^2)$   $N = a/(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{0.5}$  radio de curvatura normal

Y, tiene su origen en el meridiano central y se le añaden 500000 metros y el número de la faja multiplicado por 1000000

$$Y = y + n * 1000000 + 500000$$

$$n = (75 + \lambda_0)/3 \quad \text{número de la faja.}$$

(al término  $n * 1000000 + 500000$  se lo suele llamar falso Este)

La deformación lineal, o razón de aumento, de una distancia es el cociente entre la misma calculada a partir de las coordenadas planas de los extremos y la obtenida a partir de las coordenadas geodésicas.

A fin de estimarla se puede usar la expresión

$$m = 1 + y^2/2R^2 + y^4/24 R^4$$

$R = (NM)^{0.5}$ , radio de curvatura medio en el punto de interés

$M = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1.5}$ , radio de curvatura meridiano

$m$ , es un atributo puntual de los extremos de la línea considerada cuyo promedio podemos calcular.

Valores de la deformación lineal para la latitud media de la Argentina

$(\lambda - \lambda_0)^\circ$	$y$ (km)	$m$	cm/km
0,5	44	1,000024	2
1	88	1,000095	9
1,5	132	1,000213	21
2	176	1,000378	38
2,5	220	1,000591	59
3	264	1,000851	85

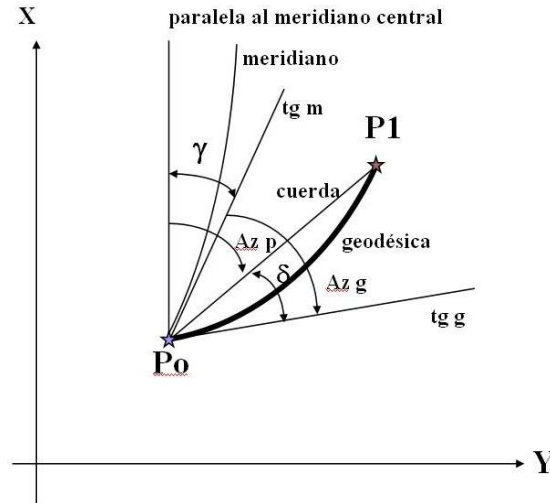
Una solución más cercana al verdadero valor, particularmente cuando las distancias son largas, es aplicar la expresión que aparece en [8] de la bibliografía

$$m = (m_i + 4 m_m + m_f)/6$$

siendo  $m_i$  y  $m_f$  los valores correspondiente a los extremos de la línea y  $m_m$  el de su punto medio.

Cuando se requiere calcular una superficie sobre el elipsoide se recurre usualmente a una proyección equivalente sin embargo si se cuenta con las coordenadas planas Gauss-Krüger es posible resolver el problema con suficiente precisión dividiendo la superficie plana obtenida por el módulo  $m$  para el centro del área elevado al cuadrado.

El acimut plano de una línea se calcula como  $\arctg = \Delta Y/\Delta X$  sin embargo si es necesario obtener el acimut elipsoidal o geodésico debe conocerse la convergencia plana de meridianos ( $\gamma$ ) y la reducción de acimut ( $\delta$ ) que se muestran en la figura siguiente:



La convergencia de meridianos  $\gamma$  es el ángulo que forma en la carta la paralela al meridiano central con el meridiano del lugar.

La reducción de acimut  $\delta$ , también identificada como arco-cuerda (t-T), es el ángulo entre la recta que une los extremos de una línea en la carta con la curva que representa la geodésica en la misma carta.

Sus expresiones matemáticas son:

$$\text{tg } \gamma = 1 \cos \phi t + \frac{1}{3} \cos^3 \phi t (1 + t^2 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) / 3 + \dots$$

$$\delta_{01} = \rho'' (2y_0 + y_1) (X_1 - X_0) / 6 R^2$$

$$\delta_{10} = \rho'' (2y_1 + y_0) (X_0 - X_1) / 6 R^2$$

$\rho'' = 206264.806$  es el valor del radián en segundos

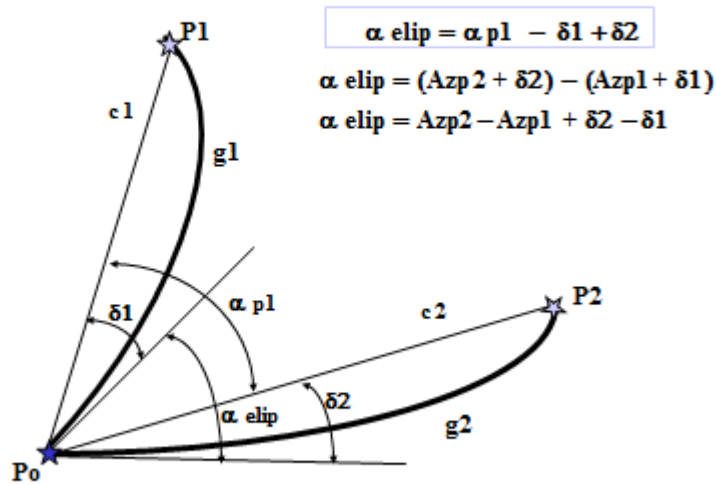
(obsérvese que ingresa “y” en lugar de “Y”)

Para calcular el acimut geodésico a partir del plano usamos

$$\text{Azg}_{01} = \text{Azp}_{01} + \gamma_0 + \delta_{01} \text{ respetando los signos de las expresiones anteriores.}$$

En el caso de tener que obtener ángulos elipsóidicos a partir de los planos el cálculo se resuelve a partir de la siguiente figura:

## ÁNGULOS ELIPSÓIDICOS Y PLANOS



Mediante la expresión indicada “ $\alpha_{elip}$ ” es posible comprobar la conformidad de la proyección en consideración.

El caso inverso lo constituye el pasaje de coordenadas planas a geodésicas.

Teniendo presente que  $AM = a (A_0 \phi - A_2 \text{sen } 2 \phi + A_4 \text{sen } 4 \phi - \dots)$

$\phi_1 = AMA/a A_0 + A_2 \text{sen } 2 \phi/A_0 - A_4 \text{sen } 4 \phi/A_0$  siendo  $AMA = X - Q$

hasta que la diferencia entre dos valores sucesivos no superen 0.00001” lo que ya se logra en seis iteraciones.

$\phi_1$  es la latitud correspondiente al arco de meridiano entre el Ecuador y el pie de la proyección del punto P sobre el meridiano central y se calcula a través de un proceso iterativo.

$$\phi(\text{LAT}) = \phi_1 - y^2 t_1 / (2 N_1 M_1) + y^4 t_1 (5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 t_1^2 \eta_1^2) / (24 N_1^3 M_1) - y^6 t_1 (61 + 90 t_1^2 + 45 t_1^4) / (720 N_1^5 M_1)$$

$$l = y / (N_1 \cos \phi_1) - y^3 (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) / (6 N_1^3 \cos \phi_1) + y^5 (5 + 28 t_1^2 + 24 t_1^4) / (120 N_1^5 \cos \phi_1)$$

$$\lambda = \lambda_0 + l$$

Siendo  $y = Y - n * 1000000 - 500000$  y  $\lambda_0 = 3n - 75$

### Ejemplo numérico 1

Elipsoide WGS 84

$a = 6378137$

$$f = 1/298.257223562$$

$$e^2 = 2f - f^2$$

De geodésicas a planas Gauss Krüger

$$\phi = -34^\circ$$

$$\lambda = -59^\circ$$

Faja 5 ( $\lambda_0 = -60^\circ$ )

$$Q = 10001965.73 \text{ m}$$

$$AM = -3763661.44 \text{ m}$$

$$X = 6237853.43 \text{ m}$$

$$Y = 5592386.56 \text{ m}$$

$$\gamma = -0^\circ 33' 33.24''$$

$$m = 1.000105$$

y en el cálculo inverso

$$AMA = -3764112.30 \text{ m}$$

$$\phi_1(\text{rad}) = -0.5934828876$$

Cálculo del acimut  $P_0 - P_1$  y del ángulo elipsoidal en  $P_0$  de  $P_1$  a  $P_2$  para lo cual incorporamos los puntos  $P_1$  y  $P_2$

$$P_1 \quad X = 6248357.37 \quad Y = 5603097.31$$

$$P_2 \quad X = 6235104.26 \quad Y = 5607134.35$$

y deducimos las reducciones de acimut

$$\delta_{01} = +2.56''$$

$$\delta_{02} = -0.68''$$

Entonces el acimut plano  $Az_{01}$  es  $45^\circ 33' 30.70''$  al que sumando la convergencia de meridianos y la reducción de acimut resulta el acimut geodésico igual a  $45^\circ 00' 0.0''$ .

El acimut plano  $Az_{02}$  es  $100^\circ 33' 33.99''$  que al hacer la diferencia  $Az_{02} - Az_{01}$  encontramos que el ángulo plano igual a  $55^\circ 00' 3.29''$ . Finalmente  $Az_{02} - Az_{01} + \delta_{02} - \delta_{01}$  resulta un ángulo elipsoidal de  $55^\circ 00' 00.0''$ .

En ambos casos, las diferencias con los valores correctos, son inferiores a  $0.1''$ .

## Ejemplo numérico 2

Elipsoide Internacional 1924

$$a = 6378388$$

$$f = 1/297$$

$$e^2 = 2f - f^2$$

De geodésicas a planas Gauss Krüger

$$\phi = -34^\circ$$

$$\lambda = -59^\circ$$

Faja 5 ( $\lambda_0 = -60^\circ$ )  
 Q 10002288.299 m  
 AM = - 3763719.87 m  
 X = 6238117.55 m  
 Y = 5592390.60 m  
 $\gamma = -0^\circ 33' 33.24''$   
 m = 1.000105

y en el cálculo inverso  
 AMA = -3764170.75 m  
 $\phi_1(\text{rad}) = -0.5934828888$

Consideremos a continuación dos casos particulares de la proyección Gauss-Krüger: UTM y Capital Federal

## UTM

UTM, que se la suele tratar como otra proyección sin embargo las diferencias están en

- que se trata de una solución secante, es decir que al módulo de deformación en el meridiano central se le asigna el valor 0.9996,
- a las fajas se las denomina zonas y tienen  $6^\circ$  de ancho,
- el valor de Q (falso Norte) es igual a cero para el hemisferio norte y 10000000 para el sur,
- a la X se la designa N (*Northing*) y a la Y se la denomina E (*Easting*), y
- para expresar las coordenadas de un punto se dan tres valores: N, E, Z (*Zone*)

Las zonas se comienzan a contar en el meridiano 180 creciendo hacia el Este. Para la Argentina la situación es:

Zona	18	19	20	21
Meridiano central ( $\lambda_0$ )	$-75^\circ$	$-69^\circ$	$-63^\circ$	$-57^\circ$

Las fórmulas directas puede expresarse, sintéticamente, del siguiente modo:

$$N = Q + k X$$

$$E = 500000 + k y \text{ (siendo 500000 el falso Este)}$$

$$Z = (183 + \lambda_0)/6$$

$$m = k (1 + y^2/2R^2 + y^4/24 R^4)$$

X e y son las mismas que usamos para calcular las coordenadas Gauss-Krüger y  $k = 0.9996$  mientras que las inversas son:

$$\text{AMA} = (N - Q)/k$$

$$y = (E - 500000)/k$$

Ejemplo numérico, de geodésicas a planas UTM:



Elipsoide WGS 84  
a = 6378137  
f = 1/298.257223562  
 $e^2 = 2f - f^2$

$$\phi = -34^\circ \quad \lambda = -61^\circ$$

AM = - 3763661.44 m  
N = 6236040.86 m  
E = 684709.83 m  
Zona 20 ( $\lambda_0 = -63^\circ$ )  
m = 1.000021

y en el cálculo inverso  
AMA = -3765465.33 m  
 $\phi_1$  (rad) = -0.5936957810

## Capital Federal (CABA)

El otro caso particular es el de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires cuya superficie, lo mismo que conurbano bonaerense, se encuentra sobre las áreas correspondientes a dos fajas (la 5 y la 6) del esquema convencional donde la deformación es la máxima para su latitud. Es por ello que el origen de las coordenadas planas se eligió en la Basílica de Flores, cerca del centro geométrico de la ciudad:

- X = Y = 100000 metros
- coordenadas geodésicas Campo Inchauspe 1969
- $\phi_0 = - 34^\circ 37' 46.9796''$
- $\lambda_0 = -58^\circ 27' 45.7155''$  (meridiano central)
- m = 0.999998 (módulo de deformación en el mismo)

Las coordenadas del centro geométrico de la ciudad de Buenos Aires (Avellaneda 1023) son:

Elipsoide Internacional de 1924  
a = 6378388 m  
f = 1/297

$\phi = -34 37 2.39$   
 $\lambda = -58 26 40.89$   
X = 101373.91 m  
Y = 101651.52 m

Dadas las características de la modalidad adoptada con origen en un punto muy cercano al centro de la ciudad, según se advierte, si en lugar de las coordenadas Campo Inchauspe 1969 se utilizaran las transformadas al marco POSGAR, por ejemplo 94, las coordenadas planas correspondientes solo difieren unos pocos centímetros que no tienen representación aun en escalas grandes.

Otra posibilidad del sistema es que resulta aplicable, con deformaciones mínimas, a todo el conurbano bonaerense.

## Cambios de fajas o zonas y de proyección

En algunas ocasiones es necesario trabajar en la zona cercana al límite entre dos fajas. En esos casos una solución es extender una de ellas para lo cual puede ser necesario convertir las coordenadas planas dadas en una faja en las correspondientes a la faja vecina.

Si bien existían algoritmos para el caso un mecanismo es convertir las coordenadas planas en geodésicas y a continuación calcular las planas en la otra faja.

Una situación que tiene la misma solución es cuando se requiere cambiar de proyección como pasar de Gauss – Krüger a UTM o viceversa y también de Gauss – Krüger convencional al caso particular de la Capital Federal.

## Mercator

Es cilíndrica, tangente al Ecuador, analítica y conforme siendo su principal característica la de representar mediante una recta la línea de acimut constante, identificada como loxodrómica, por lo que resulta de particular interés para la cartografía náutica. Los meridianos y paralelos están representados, también, por líneas rectas.

Sus deformaciones - lineal y areal - son importantes por lo que en la cartografía náutica se recurre a un cilindro secante de modo que la deformación es nula en el paralelo medio de la hoja.

Las fórmulas matemáticas pueden presentarse para la solución esférica como para la elipsoidal.

Para la esfera:

$$X (E) = R (\lambda - \lambda_0)$$

$$Y (N) = R \ln \operatorname{tg} (\pi/4 + \phi/2)$$

siendo R el radio de la esfera elegida

El módulo de deformación  $m = 1/\cos \phi$

Las expresiones inversas son:

$$\phi = \pi/2 - 2 \operatorname{arctg} e^{-Y/R}$$

$$\lambda = X/R + \lambda_0$$

Siendo e la base de los logaritmos naturales (ln)

Para el elipsoide:

$$X (E) = a (\lambda - \lambda_0)$$

$$Y (N) = a \ln[(\operatorname{tg} (\pi/4 + \phi/2) (1 - e \operatorname{sen}^2 \phi/1 + e \operatorname{sen}^2 \phi)^{e/2}]$$

El módulo de deformación es  $m = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}/\cos \phi$

Las fórmulas inversas son:

$$\phi = \pi/2 - 2 \operatorname{arctg} \{t[1 - e \operatorname{sen} \phi]/(1 + e \operatorname{sen} \phi)\}^{e/2}$$

siendo  $t = e^{Y/a}$  mediante un proceso iterativo rápidamente convergente comenzando con

$$\phi = \pi/2 - 2 \operatorname{arctg} t$$

$$\lambda = X/a + \lambda_0$$

Para reducir la deformación se utiliza un paralelo de referencia en lugar del Ecuador (cilindro secante) para lo cual las fórmulas anteriores para X e Y y también el módulo de deformación “m” se multiplican por los siguientes factores:

F1 =  $\cos \phi$  en el caso de la esfera, siendo  $\phi$  la latitud del paralelo elegido, o bien

F2 =  $\cos \phi / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$  en el caso del elipsoide.

Para aplicar las expresiones inversas es necesario, previamente, dividir tanto a X como a Y por los factores de reducción señalados.

### Ejemplos numéricos

Para el caso esférico

$$R = 6370000 \text{ m}$$

$$\lambda_0 = -66^\circ$$

$$\phi = -41^\circ$$

$$\lambda = -52^\circ 17'$$

$$X \text{ (E)} = 1524984.34 \text{ m}$$

$$Y \text{ (N)} = -5005947.10 \text{ m}$$

$$m = 1.325013$$

Utilizando un cilindro secante para la latitud media de una  $\phi_m = -41^\circ$

$$X' \text{ (N)} = 1150920.29 \text{ m}$$

$$Y' \text{ (E)} = -3778036.23 \text{ m}$$

$$m' = 1$$

Para el caso elipsoidal elegimos un punto dentro de la hoja H-210 (De Faro Punta Mogotes a Faro Claromecó) escala 1:250000 publicada por el Servicio de Hidrografía Naval (Edición 2008).

Elipsoide WGS 84

$$a = 6378137$$

$$f = 1/298.257223562$$

$$e^2 = 2f - f^2$$

$$\lambda_0 = -60^\circ 12.04'$$

$$\phi = -38^\circ$$

$$\lambda = -58^\circ$$

$$X \text{ (E)} = 244977.09 \text{ m}$$

$$Y \text{ (N)} = -4553116.23 \text{ m}$$

$$m = 1.267407$$

que para la latitud media de la hoja  $\phi_m = -38^\circ 47' 30''$

$$\cos \phi / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} = 0.780455$$

por lo que las coordenadas correspondientes a tal hoja son

$$\begin{aligned} X'(E) &= 191193.62 \text{ m} \\ Y'(N) &= -3553502.70 \text{ m} \\ m' &= 0.989154 \end{aligned}$$

En las cartas náuticas, como la mencionada, es posible comprobar las operaciones realizadas calculando las dimensiones de la hoja determinando las coordenadas de sus bordes para obtener la distancia entre los mismos en el sentido de las latitudes y de las longitudes. Estos valores, divididos por el denominador de la escala, deberían ser iguales a los correspondientes a la carta original que aparecen en el esquinero inferior derecho de la hoja en consideración.

## Cónica conforme de Lambert

Es, como su nombre lo indica, conforme. Es continua en el sentido de las longitudes por lo que se utiliza en territorios extendidos en tal sentido, los paralelos son arcos de circunferencia concéntricos y los meridianos rectas concurrentes, en ambos casos en el polo correspondiente.

El caso más típico es el empleado en la cartografía aeronáutica con dos paralelos secantes. La elección de estos paralelos se determina considerando un sexto de la diferencia de latitud entre los bordes de la hoja y ubicados a esa distancia de los bordes superior e inferior, respectivamente.

Para calcular las coordenadas de los puntos la primera operación es la determinación de los parámetros de la hoja:

$$c = \text{num/den (numerador/denominador)}$$

$$\begin{aligned} \text{num} &= \ln(N_1 \cos \phi_1) - \ln(N_2 \cos \phi_2) \\ \text{den} &= \ln \left\{ \text{tg} \psi_1 / 2 \left[ \frac{1 + e \cos \psi_1}{1 - \cos \psi_1} \right]^{e/2} \right\} - \ln \left\{ \text{tg} \psi_2 / 2 \left[ \frac{1 + e \cos \psi_2}{1 - \cos \psi_2} \right]^{e/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= a / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \\ \psi &\text{ es la colatitud } \psi = 90^\circ - \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arcsen c \\ c_1 &= N_1 \cos \phi_1 / \sin \phi_0 \left\{ \text{tg} \psi_1 / 2 \left[ \frac{1 + e \cos \psi_1}{1 - \cos \psi_1} \right]^{e/2} \right\}^c \\ R_0 &= c_1 \left\{ \text{tg} \psi_0 / 2 \left[ \frac{1 + e \cos \psi_0}{1 - \cos \psi_0} \right]^{e/2} \right\}^c \end{aligned}$$

Para calcular, finalmente, las coordenadas del punto genérico  $P_i$

$$R_i = c_1 \left\{ \text{tg} \psi_i / 2 \left[ \frac{1 + e \cos \psi_i}{1 - \cos \psi_i} \right]^{0.5e} \right\}^c$$

$$\begin{aligned} X_i(E) &= R_i \text{ sen } cL \\ Y_i(N) &= R_0 - R_i \text{ cos } cL \end{aligned}$$

$$m_i = c R_i / N_i \text{ cos } B_i$$

Las fórmulas inversas son:

$$R = [X^2 + (R_0 - Y)^2]^{1/2}$$

$$\lambda = \arctg (X/R_0 - Y)/c$$

$$\psi = 2 \arctg \{ (R/c_1)^{1/c} / [(1 + e \cos \psi)/(1 - e \cos \psi)]^{e/2} \}$$

a través de un proceso iterativo rápidamente convergente comenzando con

$$\psi = 2 \arctg (R/c_1)^{1/c}$$

Finalmente

$$\phi = 90^\circ - \psi$$

### Ejemplo numérico

Para el caso elegimos un punto ubicado dentro de la hoja CAA-5 escala 1:1000000 editada por la Fuerza Aérea Argentina (1982) que se extiende entre las latitudes  $-40^\circ$  y  $-48^\circ$  siendo, en consecuencia, los paralelos estándar  $-41^\circ 20'$  y  $-46^\circ 40'$ .

Elipsoide Internacional de 1924

$$a = 6378388$$

$$f = 1/297$$

$$e^2 = 2f - f^2$$

$$\phi_0 = -69^\circ$$

$$\phi = -46^\circ$$

$$\lambda = -74^\circ$$

$$c = -0.69491300$$

$$\phi_0 \text{ (rad)} = -0.76829891$$

$$c_1 = -11944027.85 \text{ m}$$

$$R_0 = -6603940.26 \text{ m}$$

$$R = -6384117.05 \text{ m}$$

$$X \text{ (E)} = -386912.21 \text{ m}$$

$$Y \text{ (N)} = -231558.49 \text{ m}$$

$$m = 0.99952204$$

## Apéndice 1

### Planisferios

La representación total de la Tierra no es una tarea fácil pues en este caso es donde, de una manera más sencilla, puede apreciarse inmediatamente el efecto de las deformaciones.

Mercator, probablemente el más conocido de los cartógrafos, estableció su proyección (1569) cuyo elemento más notable era la representación por medio de una línea recta de rumbo constante la trayectoria entre dos puntos de la Tierra. Sin embargo no era la menor distancia entre los dos puntos y además presentaba otro defecto importante: las áreas polares mostraban enormes deformaciones de superficie. Por otra parte pretender representar a la Tierra esférica mediante un rectángulo era un despropósito, los polos (sendos puntos en la Tierra) están reproducidos como dos líneas de las mismas dimensiones que el Ecuador.

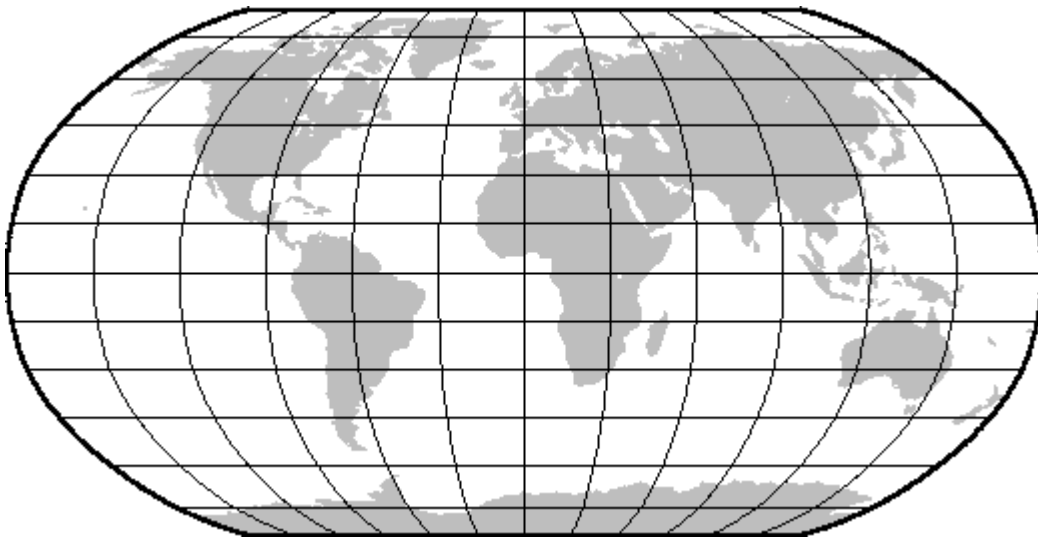
De todos modos este trabajo de Mercator tuvo una difusión tan amplia que la mayoría de los planisferios que hoy podemos ver en oficinas y aulas están en esta proyección, habiendo creado en nosotros la imagen de una Groenlandia tan grande como América del Sur.

A fin de recomponer la situación han aparecido a lo largo del tiempo otros trabajos. Mencionaremos el intento de van der Grinten (1922) que estableció su proyección sin conservar las formas ni tampoco las áreas adoptando una forma curva para los paralelos y meridianos pero continuando con la alteración, no tan notable como Mercator, de las área polares.

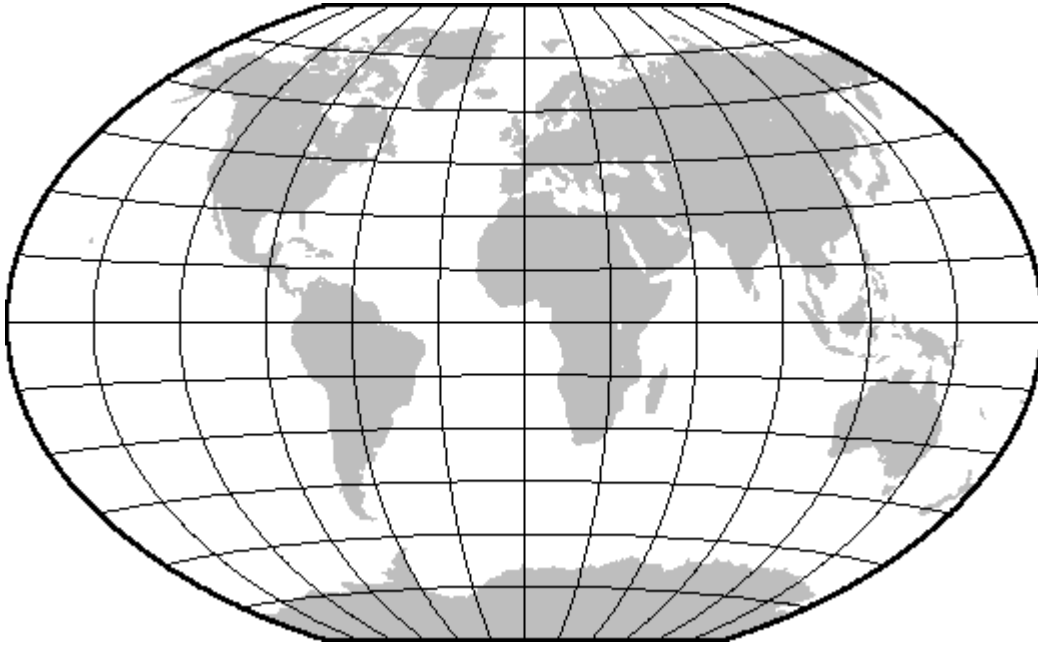
Un historiador, Arno Peters, propuso (1976) una proyección conservando las superficies (equivalente) pero que distorsionaba totalmente las formas, además de haber establecido una polémica discusión acerca de su autoría.

La conocida entidad geográfica de los Estados Unidos de América (NationalGeographicSociety) estableció en 1987 un comité para evaluar las proyecciones disponibles a fin de encontrar la que mejor representara la Tierra en su totalidad. Fue elegida la elaborada en 1963 por Arthur Robinson. No conserva las formas ni tampoco las áreas pero su equilibrio entre ambas constituye su logro más importante. Desde el punto de vista de cálculo es totalmente sencilla pues sólo se requieren unos pocos coeficientes y unas fórmulas sencillas. Es probable que no sea, desde el punto de vista matemático, una solución rigurosa pero el resultado final es apropiado y la imagen (¿qué otra cosa es un mapa?) aceptable.

Unos años después (1998) la misma entidad eligió para sus mapas otra proyección, rescatada del tiempo, la Winkel III (Tripel) cuyas diferencias con la de Robinson se pueden observar en las imágenes que siguen.



Robinson



Winkel III

Las fórmulas de cálculo para las proyecciones van der Grinten, Robinson y Winkel III (Tripel) se encuentran en la referencia bibliográfica [6].

## Apéndice 2

Desarrollaremos en este apartado algunas consideraciones acerca de la evaluación de una proyección cartográfica. La solución más adecuada es el empleo de la elipse indicatriz de Tissot que muestra, básicamente, cómo se representa en la carta un círculo elemental de la superficie terrestre:

- si la proyección es conforme será un círculo cuya superficie indicará la deformación areal, y
- si fuera equivalente la superficie del círculo será igual a la del terreno pero su forma será una elipse en la que los semiejes serán proporcionales a las deformaciones en tales direcciones.

Una aplicación práctica de la elipse de Tissot es generar sobre el elipsoide de referencia un círculo pequeño, por ejemplo de radio igual a 100, determinando las coordenadas geodésicas de los puntos de su perímetro cada  $10^\circ$  de acimut y luego calcular, para tales puntos sus coordenadas planas.

Presentamos a continuación un ejemplo siendo suficiente solamente un cuadrante:

- el cálculo de las coordenadas geodésicas se efectuó empleando las fórmulas de Puissant, sin embargo se puede alcanzar el mismo resultado mediante expresiones aproximadas,
- el origen es el punto  $\phi = -34^\circ \lambda = -58^\circ$
- como proyección cartográfica se usó Gauss Krüger,
- elipsoide de referencia el WGS 84,
- en la columna distancias, respecto del origen (o centro) se nota que todas son iguales a 100.01 indicando que la proyección es conforme, y

- la superficie de tales círculos es superior a la del terreno (no es equivalente) e incrementada de acuerdo al módulo de deformación elevado al cuadrado.

Az	Latitud			Longitud			X	Y	distancia (m)
P <sub>0</sub>	-34			-58			6237853,43	6407613,44	
0	-33	-59	-56,7545	-58	0	-2,6E-11	6237953,43	6407612,47	100,00
10	-33	-59	-56,8038	-57	-59	-59,3233	6237952,08	6407629,85	100,01
20	-33	-59	-56,9502	-57	-59	-58,6672	6237947,73	6407646,73	100,00
30	-33	-59	-57,1893	-57	-59	-58,0516	6237940,52	6407662,6	100,01
40	-33	-59	-57,5138	-57	-59	-57,4952	6237930,66	6407676,98	100,01
50	-33	-59	-57,9138	-57	-59	-57,0149	6237918,46	6407689,42	100,01
60	-33	-59	-58,3772	-57	-59	-56,6253	6237904,27	6407699,56	100,01
70	-33	-59	-58,8900	-57	-59	-56,3383	6237888,55	6407707,08	100,01
80	-33	-59	-59,4364	-57	-59	-56,1625	6237871,75	6407711,76	100,01
90	-33	-59	-60,0000	-57	-59	-56,1033	6237854,4	6407713,45	100,01

En la obra *An Album of Map Projections* indicada en la bibliografía [7] pueden observarse las elipses de Tissot para distintas latitudes y longitudes representadas sobre las imágenes cartográficas de los planisferios elaborados utilizando una extensa lista de proyecciones cartográficas.

Otra evaluación de las proyecciones cartográficas.

Richard Capek (Charles University, Czech Republic) en su trabajo titulado *¿Cuál es la mejor proyección para un mapa mundial?* [1].

El autor propone un índice de caracterización de las distorsiones, que denomina Q y es definido como la representación porcentual de las distorsiones permitidas, teniendo presente los siguientes parámetros: distancias, ángulos y áreas: en el trabajo fueron analizadas distintas proyecciones y la lista publicada incluye 100 de ellas, ordenadas en función de su calidad decreciente. De la lista incluimos el valor Q de las mencionadas en el fascículo (notando la ausencia de Mercator): Robinson, 82.6; Winkel, 81.7; Peters, 75.4 y van der Grinten, 64.

### Apéndice 3

El sistema más usado es el UTM estando el subcontinente cubierto por las zonas que se indican a continuación junto con el meridiano central correspondiente a cada una de ellas:

Zona	$\lambda^\circ$
18	-75
19	-69
20	-63
21	-57
22	-51
23	-45
24	-39
25	-33

La situación para cada uno de los países limítrofes con la Argentina es la siguiente.



Bolivia, utiliza las zonas 19; 20 y 21.

Brasil, todas las zonas.

Chile, la zona 19 en el norte y 18 en el sur utilizando para la cartografía vial la variante LTM (sistemas locales transversos de Mercator) que se extienden sólo medio grado a cada lado del meridiano central.

Paraguay, emplea Gauss-Krüger con el mismo esquema de fajas, falsos norte y este y módulo de deformación que la Argentina.

Uruguay, empleó Gauss-Krüger usando grados centesimales con meridiano central  $62^{\text{G}}$  W que se corresponde con  $-55^{\circ} 48'$  pero a partir de 1988 pasó a la proyección UTM en las zonas 21 y 22 para la cartografía digital y progresivamente se aplicará para las ediciones en papel.

La información indicada surge básicamente de la columna mensual *Grids & Datums* (cuyo redactor es Clifford Mugnier) de la revista PE&RS [www.asprs.org/a/resources/grids](http://www.asprs.org/a/resources/grids) y de otras fuentes disponibles en Internet o de comunicaciones personales.

Respecto de los marcos de referencia empleados en los mismos países se sugiere visitar la sección Redes Nacionales del sitio SIRGAS [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org) que se actualiza en forma permanente.

## Bibliografía

[1] Capek, Richard

Which is the best projection for the world map?

[http://www.google.com.ar/#hl=es&sugexp=kjrmc&cp=43&gs\\_id=4y&xhr=t&q=richard+capek+Which+is+the+best+projections&pq=richard+capek&pf=p&scient=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=richard+capek+Which+is+the+best+projections&aq=f&aqi=&aql=&gs\\_sm=&gs\\_upl=&bav=on.2.or.r\\_gc.r\\_pw..cf.osb&fp=26959963ced80b70&biw=1093&bih=515](http://www.google.com.ar/#hl=es&sugexp=kjrmc&cp=43&gs_id=4y&xhr=t&q=richard+capek+Which+is+the+best+projections&pq=richard+capek&pf=p&scient=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=richard+capek+Which+is+the+best+projections&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=on.2.or.r_gc.r_pw..cf.osb&fp=26959963ced80b70&biw=1093&bih=515)

[2] Horvat, Esteban

Problemas del cálculo geodésico

Publicación Técnica N° 41, IGM, 1968

El volumen le dedica un capítulo a los problemas directo e inverso de la proyección Gauss-Krüger, incluyendo la convergencia meridiana, la deformación lineal y la reducción de acimut.

[3] López Amador, Sagrario

La proyección Mercator

[http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id\\_articulo=169](http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=169)

[4] Meyer, Thomas

Introduction to Geometrical and Physical Geodesy

ESRI press, 2010

La obra trata los temas incluidos en el título y dedica un capítulo, el octavo, a las proyecciones cartográficas.

[5] Millán Gamboa, José Manuel  
Fundamentos para Cartografía Náutica  
JM Ediciones, 2007

Dedica un capítulo a la proyección Mercator, un extracto del cual está en <http://www.jmediciones.com/calculocoor.htm>

[6] Snyder, John  
Map Projections - A working manual  
U. S. Geological Survey, Professional Paper 1395  
394 páginas

Uno de los libros más completos acerca de las proyecciones cartográficas es el elaborado por John Snyder que incluye los conceptos básicos de cartografía matemática y una serie extensa de proyecciones de las que expone sus características, las fórmulas - tanto esféricas como elipsóidicas - para pasar de coordenadas curvilíneas a planas y también, lo que no es usual encontrar en la literatura afín, las fórmulas inversas.

En el apéndice se incorporan ejemplos numéricos, incluyendo valores intermedios, para las cuatro alternativas mencionadas.

Está disponible en  
<http://pubs.usgs.gov/pp/1395/report.pdf>

[7] Snyder, John & Voxland, Philip  
An Album of Map Projections  
U. S. Geological Survey, Professional Paper 1453

Contiene las imágenes del planisferio en unas 100 proyecciones cartográficas incluyendo algunas variantes de las mismas agregando las elipses indicatrices de Tissot para cada 30° (de latitud y de longitud) correspondientes a cada una de ellas así como, en el apéndice, las fórmulas de cálculo para el problema directo.

Está disponible en  
<http://projections.mgis.psu.edu/>  
de modo interactivo para 10 proyecciones.

[8] The Irish Grid  
Ordnance Survey of Northern Ireland, 2000  
[http://www.osni.gov.uk/2.1\\_the\\_irish\\_grid.pdf](http://www.osni.gov.uk/2.1_the_irish_grid.pdf)